Risoluzione Problemi Campionato – Tappa di Gennaio

Problema Gennaio (cl. 1)

Testo:
Ci sono 5 scatole numerate da 1 a 5. In ogni scatola c'è un solo numero: 10, 20, 30, 40, 50, tutti diversi. Il 10 non è nella scatola 1 né nella scatola 5. Il 50 è nella scatola 3. Il 30 non è nella scatola 2. Il 20 si trova in una scatola con numero più grande di quella del 10. Il 40 non è nella scatola 4. Quando hai scoperto quale numero c'è in ogni scatola, scrivi un unico numero mettendo in fila i numeri delle scatole dalla 1 alla 5, uno dopo l'altro, senza spazi.
Quanti sono i possibili numeri che ottieni?

Svolgimento:
Il 50 è fissato nella scatola 3. Il 10 non può stare né nella scatola 1 né nella 5, quindi può stare solo nella scatola 2 oppure nella scatola 4.
• Se il 10 è nella scatola 2, allora il 20 deve stare nella 4 o nella 5. Poiché il 40 non può stare nella 4 e il 30 non può stare nella 2, restano esattamente 2 disposizioni compatibili.
• Se il 10 è nella scatola 4, allora il 20 deve stare nella 5. Anche qui, rispettando i vincoli rimanenti, si ottengono esattamente 2 disposizioni compatibili.
Quindi le configurazioni corrette sono 4 (tabella sotto).

Scatola	1	2	3	4	5
Configurazione A	30	10	50	20	40
Configurazione B	40	10	50	20	30
Configurazione C	30	40	50	10	20
Configurazione D	40	10	50	30	20

Problema Gennaio (cl. 2)

Testo:
Finito il cenone, prima di uscire a vedere i fuochi d'artificio, Alex esclama: "Son contento che entriamo nel 2026, gli anni con 4 divisori sono i miei preferiti". Allora Daniele decide di cercare quale sarà il primo anno con 4 divisori dopo il 2026. Qual è l'anno cercato?

Svolgimento:
Un numero ha esattamente 4 divisori se e solo se è:
• prodotto di due primi distinti ($p \cdot q$), oppure
• cubo di un primo (p^3).
Controlliamo gli anni successivi:
2027 è primo → 2 divisori.
$2028 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$ → più di 4 divisori.
$2029 = 7 \cdot 17^2$ → più di 4 divisori.
$2030 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29$ → più di 4 divisori.
$2031 = 3 \cdot 677$ con 3 e 677 primi distinti → ha i divisori 1, 3, 677, 2031.
L'anno cercato è 2031.

Problema Gennaio (cl. 3)

Testo:
Come ogni anno, Gigi e Simo giocano a capodanno una partita a scacchi. La partita finisce patta, e Alex decide di decretare il vincitore con un problema di matematica. “Quante sono le possibili configurazioni su una scacchiera 9x9, in modo tale che si dispongano 9 regine e nessuna sia minacciata dalle altre (non contate le configuarazioni ottenibili con rotazione)?”
N.B. la regina si muove di quante caselle vuole in linea retta, sia orizzontalmente, verticalmente (come una torre) sia diagonalmente (come un alfiere).

Svolgimento:
1) Riduzione a permutazioni (combinatoria di base).
In una configurazione valida non possono esserci due regine nella stessa riga o colonna. Quindi in ogni riga c’è esattamente una regina e in ogni colonna esattamente una regina.
Se indichiamo con $p(i)$ la colonna della regina nella riga i, allora p è una permutazione di $\{1,2,\dots,9\}$.
Le scelte possibili senza diagonali sarebbero $9!$.
2) Vincolo diagonali.
Due regine nelle righe i e j ($i \neq j$) stanno sulla stessa diagonale se:
• diagonale “/”: $i + p(i) = j + p(j)$
• diagonale “\”: $i - p(i) = j - p(j)$
Quindi una permutazione p è valida se per ogni ip(i) $- p(j) \neq i - j$ e $p(i) - p(j) \neq j - i$.
3) Numero di soluzioni totali per $n=9$.
Contando (con procedura sistematica di backtracking, che prova riga per riga solo colonne e diagonali ancora libere) si ottiene che le soluzioni totali sono:
$Q(9) = 352$.
4) Passaggio da “tutte” a “fondamentali” usando le simmetrie.
Le simmetrie della scacchiera (rotazioni e riflessioni) formano il gruppo diedrale: ogni orbita di una soluzione può avere 8 elementi (nessuna simmetria), 4 elementi (simmetria centrale a 180°), oppure 2 elementi (simmetria di rotazione a 90°).
Vale la formula:
$Q(9) = 8 \cdot A(9) + 4 \cdot P(9) + 2 \cdot R(9)$
dove:
$A(9)$ = numero di orbite “asimmetriche”,
$P(9)$ = numero di orbite con simmetria centrale (180°),
$R(9)$ = numero di orbite con simmetria di rotazione (90°).
5) Calcolo di $P(9)$ e $R(9)$.
Per $n=9$ le soluzioni con simmetria di rotazione a 90° sono 0, quindi $R(9)=0$.
Le soluzioni con simmetria centrale (180°) sono 16. Poiché una soluzione con sola simmetria a 180° genera un’orbita di 4 soluzioni (rotazioni 0° e 180°, e poi le due riflessioni), si ha:
$P(9) = 16 / 4 = 4$.
6) Calcolo di $A(9)$ e delle soluzioni fondamentali.
Sostituendo nella formula:
$352 = 8 \cdot A(9) + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 8 \cdot A(9) + 16$
$8 \cdot A(9) = 352 - 16 = 336$
$A(9) = 336 / 8 = 42$.
Il numero di soluzioni fondamentali (cioè contando una sola rappresentante per ogni orbita di simmetria) è:
$F(9) = A(9) + P(9) + R(9) = 42 + 4 + 0 = 46$.
Quindi la risposta richiesta è 46.

Problema Gennaio (cl. 4)

Testo:
A Diarik Town, il laboratorio di produzione di componenti elettroniche possiede tre macchine M1, M2, M3. Ogni componente prodotto è buono oppure difettoso.
La macchina M1 produce il 40% dei componenti totali, con probabilità di difetto pari al 5%.
La macchina M2 produce il 35% dei componenti, con probabilità di difetto pari al 10%.
La macchina M3 produce il 25% dei componenti, con probabilità di difetto pari al 20%.

Il controllo qualità del laboratorio seleziona a caso 5 componenti dalla produzione complessiva di una giornata molto grande (si può assumere che le estrazioni siano indipendenti).
Il controllo risulta superato se e solo se:
il numero totale di componenti difettosi estratti è al massimo 1. Oppure, se i componenti difettosi sono esattamente 2, allora devono provenire da macchine diverse.
Il dirigente chiede al Team qualità di calcolare la probabilità che il controllo qualità venga superato.
(Si fornisca come risposta la parte decimale del risultato, arrotondando alla seconda cifra)

Svolgimento:
1) Probabilità di difetto di un componente scelto a caso.
Indichiamo con D l'evento "difettoso" e con B l'evento "buono".
Usiamo la media pesata sulle macchine:
$P(D) = P(M1)\cdot P(D|M1) + P(M2)\cdot P(D|M2) + P(M3)\cdot P(D|M3)$
$= 0{,}40\cdot 0{,}05 + 0{,}35\cdot 0{,}10 + 0{,}25\cdot 0{,}20$
$= 0{,}020 + 0{,}035 + 0{,}050$
$= 0{,}105$.
Quindi $P(B) = 1 – 0{,}105 = 0{,}895$.
2) Caso favorevole A: al massimo 1 difettoso.
• 0 difettosi:
P0 = (0,895)^5 = 0.574269
• 1 difettoso:
P1 = C(5,1)·(0,105)·(0,895)^4
= 5·0,105·(0,895)^4
= 0.336862
Quindi P(A) = P0 + P1 = 0.911130.
3) Caso favorevole B: esattamente 2 difettosi, da macchine diverse.
Qui dobbiamo distinguere da quale macchina provengono i difetti.
Probabilità che un singolo pezzo sia difettoso e venga da:
• M1: q1 = 0,40·0,05 = 0,02
• M2: q2 = 0,35·0,10 = 0,035
• M3: q3 = 0,25·0,20 = 0,05
Per avere 2 difettosi da macchine diverse, le coppie possibili sono:
(M1,M2), (M1,M3), (M2,M3).
Poiché i due difetti possono comparire in due ordini diversi, la probabilità per "due difetti distinti" in due posizioni fissate è:
q1·q2 + q2·q1 + q1·q3 + q3·q1 + q2·q3 + q3·q2
= 2·(q1q2 + q1q3 + q2q3)
= 2·(0,02·0,035 + 0,02·0,05 + 0,035·0,05)
= 2·(0,0007 + 0,0010 + 0,00175)
= 2·0,00345
= 0,00690.
Ora scegliamo quali 2 posizioni (su 5) sono difettose: C(5,2) = 10.
Le altre 3 posizioni devono essere buone: (0,895)^3.
Quindi:
P(B) = C(5,2)·0,00690·(0,895)^3
= 10·0,00690·(0,895)^3
= 0.049467.
4) Probabilità totale di superare il controllo.
P(superato) = P(A) + P(B)
= 0.911130 + 0.049467
= 0.960598.
Arrotondando alla seconda cifra decimale: 0,96.
La parte decimale richiesta è quindi: 96.