Risoluzione Problemi Campionato Tappa di Febbraio

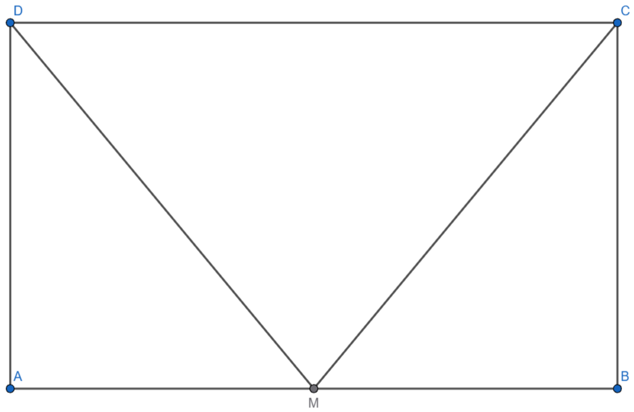
Problema Febbraio (cat. 1-2 media)

Testo:

Ispirato dal periodo del Carnevale, Daniele decide di mettere alla prova Simone con un quesito di geometria. ”Nel rettangolo ABCD la base AB misura 10 cm e l’altezza AD misura 6 cm. Sia M il punto medio del lato AB. Si tracciano i segmenti MC e MD, che dividono il rettangolo in tre regioni triangolari. Determina l’area in cm^2 della regione più grande.” Che numero deve rispondere Simone per mostrare a Daniele di essere sempre pronto ad ogni sfida?

Svolgimento:

Iniziamo la risoluzione disegnando la figura ABCD.



A questo punto, osserviamo che sono presenti tre triangoli, $\overset{\triangle}{AMD}$, $\overset{\triangle}{MBC}$, $\overset{\triangle}{DMC}$. I triangoli $\overset{\triangle}{AMD}$ and $\overset{\triangle}{MBC}$ risultano essere triangoli rettangoli, I triangoli $\overset{\triangle}{AMD}$ e $\overset{\triangle}{MBC}$ sono rettangoli, quindi hanno area

$$A = \frac{AM \cdot AD}{2} = \frac{BM \cdot BC}{2}.$$

Inserendo i valori numerici:

$$A = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15\,\text{cm}^2.$$

A quuesto punto, osserviamo che il triangolo $\overset{\triangle}{DMC}$ ha base DC che misura 10 cm e altezza che misura 6 cm, come AD e BC. Perciò l’area risulta valere

$$A = \frac{DC \cdot MH}{2} = \frac{10 \cdot 6}{2} = 30\text{cm}^2.$$

Dunque, il risultato richiesto è $\boxed{30}$.

Problema Febbraio (cat. 3 media-1 superiore)

Testo:

Il carnevale si sta avvicinando, e il Team deve scegliere chi si occuperà di decidere il tema dell'anno. Per sorteggiare il candidato fortunato trovano questo problema nei loro libri: In un sacchetto ci sono 5 palline rosse e 3 palline blu. Si estraggono 2 palline senza reinserimento. 1)Qual è la probabilità che escano due palline dello stesso colore? 2)Sapendo che è uscita almeno una rossa, qual è la probabilità che siano uscite due rosse? Cosa dovrebbe rispondere Daniele per aggiudicarsi l'incarico? (Si fornisca come soluzione la somma di numeratori e denominatori delle due frazioni delle probabilità ridotte ai minimi termini).

Svolgimento:

Risolviamo le due richieste separatamente.

Probabilità che escano due palline dello stesso colore

Nel sacchetto ci sono 5 palline rosse e 3 palline blu (totale 8). Si estraggono 2 palline senza reinserimento. Per calcolare che siano dello stesso colore dovremo moltiplicare la probabilità che la prima sia rossa (o blu) per la probabilità che la seconda sia rossa (o blu).

Probabilità di 2 rosse:

$$P(RR) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$$

Probabilità di 2 blu:

$$P(BB) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

Quindi, la robabilità che le due palline siano dello stesso colore è la somma delle probabilità appena calcolate, ovvero:

$$P = \frac{5}{14} + \frac{3}{28} = \frac{10}{28} + \frac{3}{28} = \frac{13}{28}$$

Probabilità che siano uscite 2 rosse sapendo che è uscita almeno una rossa

La probabilità che sia uscita almeno una rossa si calcola sottrandeo dal totale la probabilità che sia uscita una blu

$$P = 1 - \frac{3}{28} = \frac{25}{28}$$

Infine, per calcolare la probabilità richiesta, dovremo dividere la probabilità che siano uscite due rosse $\left(\frac{5}{14}\right)$ per la probabilità appena calcolata. Questo passaggio è necessario per imporre che la probabilità di ottenere 2 rosse sia condizionata al fatto che già ne è uscita una. Dunque:

$$P(2R \mid \text{almeno una R}) = \frac{\frac{5}{14}}{\frac{25}{28}} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

Concludendo, la somma richiesta vale:

$$(13 + 28) + (2 + 5) = 41 + 7 = 48$$

$$\boxed{48}$$

Problema Febbraio (cat. 2-3 superiore)

Testo:

Al MathLab di Diarik Town, il sistema di calcolo va in tilt. Sullo schermo compare il messaggio: "Per riavviare il software risolvere il problema in sovraimpressione. Il valore da inserire è la somma tra numeratore e denominatore del valore assoluto della frazione E ridotta ai minimi termini."

Siano x, y, z le radici (tutte reali e tali che $x \neq 2$, $y \neq 2$, $z \neq 2$) del seguente polinomio:

$$P(t) = t^3 - 5t^2 + 7t - 11$$

Calcola il valore esatto della seguente espressione:

$$E = \frac{1}{(2-x)(2-y)} + \frac{1}{(2-y)(2-z)} + \frac{1}{(2-z)(2-x)}$$

Che numero deve inserire il Team per far ripartire tutto il sistema operativo?

Svolgimento:

Risolviamo il problema seguendo alcuni passaggi fondamentali.

Siano x, y, z le radici reali del polinomio

$$P(t) = t^3 - 5t^2 + 7t - 11.$$

Vogliamo calcolare

$$E = \frac{1}{(2-x)(2-y)} + \frac{1}{(2-y)(2-z)} + \frac{1}{(2-z)(2-x)}.$$

Riscrittura dell'espressione

Osserviamo che

$$2 - x = -(x-2).$$

Poiché il prodotto contiene due fattori, i segni meno si eliminano:

$$(2-x)(2-y) = (x-2)(y-2).$$

Quindi

$$E = \frac{1}{(x-2)(y-2)} + \frac{1}{(y-2)(z-2)} + \frac{1}{(z-2)(x-2)}.$$

Riduzione a denominatore comune

Mettendo tutto sotto il denominatore comune $(x-2)(y-2)(z-2)$, il numeratore diventa

$$(x-2) + (y-2) + (z-2).$$

Dunque

$$E = \frac{(x-2) + (y-2) + (z-2)}{(x-2)(y-2)(z-2)}.$$

Semplificando il numeratore:

$$(x-2) + (y-2) + (z-2) = x + y + z - 6.$$

Uso delle formule di Viète

Dal polinomio

$$P(t) = t^3 - 5t^2 + 7t - 11$$

si ha, per le formule di Viète:

$$x + y + z = 5.$$

Quindi il numeratore vale:

$$5 - 6 = -1.$$

Calcolo del denominatore

Poiché x, y, z sono radici di $P(t)$, il polinomio si può fattorizzare come

$$P(t) = (t - x)(t - y)(t - z).$$

Sostituendo $t = 2$ otteniamo:

$$P(2) = (2 - x)(2 - y)(2 - z).$$

Osserviamo che

$$2 - x = -(x - 2),$$

quindi

$$(2 - x)(2 - y)(2 - z) = (-1)^3(x - 2)(y - 2)(z - 2) = -(x - 2)(y - 2)(z - 2).$$

Pertanto

$$(x - 2)(y - 2)(z - 2) = -P(2).$$

Calcoliamo ora $P(2)$:

$$P(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 - 11 = 8 - 20 + 14 - 11 = -9.$$

Quindi

$$(x - 2)(y - 2)(z - 2) = -(-9) = 9.$$

Valore finale di E

$$E = \frac{-1}{9} = -\frac{1}{9}.$$

Il valore assoluto è

$$|E| = \frac{1}{9}.$$

La somma tra numeratore e denominatore è

$$1 + 9 = 10.$$

$$\boxed{10}$$

.

Problema Febbraio (cat. 4-5 superiore)

Testo:

Alex, Sofia e Giulia stanno esplorando un antico castello quando, a un certo punto, trovano una porta magica che può essere aperta solo inserendo la risposta corretta a un'enigma riportato su una pergamena. L'enigma recita: "Si considerino dieci rette tracciate su un piano. Le rette sono disposte in modo tale che nessuna coppia di rette è parallela e non esistono punti in cui tre o più rette si incontrano contemporaneamente. Si chiede di determinare in quante regioni distinte queste dieci rette suddividono il piano." Quale numero devono inserire i tre ragazzi per poter proseguire la loro esplorazione del castello?

Svolgimento:

Si considerino 10 rette nel piano tali che:

- nessuna coppia sia parallela;
- non esistano punti in cui tre o più rette si incontrano.

Idea della soluzione
Osserviamo che ogni nuova retta interseca tutte le precedenti in punti distinti. Questo ci permette di contare quante nuove regioni si formano ogni volta.

Costruiamo il risultato passo per passo.

Con 0 rette:

$$R_0 = 1$$

(il piano intero).

Con 1 retta:

$$R_1 = 2$$

(la retta divide il piano in due parti).

Con 2 rette (che si intersecano):

$$R_2 = 4$$

Con 3 rette: la terza retta interseca le prime due in 2 punti, quindi viene divisa in 3 segmenti. Ogni segmento crea una nuova regione.

$$R_3 = 7$$

Osserviamo il meccanismo generale:
La n-esima retta interseca le precedenti $n-1$ rette in $n-1$ punti distinti, quindi viene divisa in n segmenti. Ogni segmento crea una nuova regione.
Dunque vale la relazione:

$$R_n = R_{n-1} + n.$$

Sommiamo le nuove regioni
Partendo da $R_0 = 1$, otteniamo:

$$R_n = 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

La somma dei primi n numeri naturali è:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Quindi la formula generale è:

$$R_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Calcolo per $n = 10$

$$R_{10} = 1 + \frac{10 \cdot 11}{2} = 1 + 55 = 56.$$

Quindi, il valore che devono inserire i nostri avventurieri è:

$$\boxed{56}$$