Risoluzione Problemi Campionato Tappa di Marzo

Problema Marzo (cat. 1-2 media)

Testo:

Alla Diarik School, dieci studenti sono disposti in fila per un gioco. Il primo studente sceglie un numero intero positivo. Ogni studente successivo, partendo dal secondo, deve calcolare il proprio numero seguendo questa regola: Se il numero dello studente precedente è pari, lo deve dividere per 2. Se il numero dello studente precedente è dispari, deve aggiungere 7. Sappiamo che il decimo studente della fila ha ottenuto come risultato finale il numero 6. Qual è il numero più piccolo che il primo studente potrebbe aver scelto all'inizio?

Svolgimento:

Chiamiamo:

$$n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{10}$$

i numeri ottenuti dai dieci studenti. Sappiamo che:

$$n_{10} = 6$$

Noi dobbiamo trovare il più piccolo valore possibile di n_1.

Il gioco va avanti dal primo studente al decimo, ma per trovare il numero iniziale più piccolo conviene **ragionare al contrario**, cioè partire da 6 e risalire indietro.

Infatti, se sappiamo un numero, possiamo chiederci:

> "Quale numero poteva avere lo studente precedente per ottenere questo risultato?"

Ogni volta ci sono due possibilità:

- Se il numero precedente era **pari**, allora il nuovo numero si ottiene facendo la metà. Quindi, andando all'indietro, possiamo anche **raddoppiare**.
- Se il numero precedente era **dispari**, allora il nuovo numero si ottiene aggiungendo 7. Quindi, andando all'indietro, possiamo **sottrarre** 7, ma solo se il risultato era davvero un numero dispari positivo.

Come si risale indietro?

Partiamo da:

$$n_{10} = 6$$

Cerchiamo i possibili valori di n_9.
Per ottenere 6, il numero prima poteva essere:

- 12, perché se un numero è pari si divide per 2 e

$$12 \div 2 = 6$$

- oppure $6 - 7 = -1$, ma -1 non va bene perché il numero scelto deve essere positivo, e inoltre qui non ci serve.

Quindi:

$$n_9 = 12$$

Adesso cerchiamo n_8.
Per ottenere 12, il numero prima poteva essere:

- 24, perché

$$24 \div 2 = 12$$

- oppure $12 - 7 = 5$, e questo va bene perché 5 è un numero dispari positivo:

$$5 + 7 = 12$$

Quindi i possibili valori di n_8 sono:

$$n_8 = 24 \quad \text{oppure} \quad n_8 = 5$$

Siccome vogliamo ottenere alla fine il **numero iniziale più piccolo possibile**, conviene sempre scegliere, quando si può, il numero più piccolo.
Tra 24 e 5, scegliamo:

$$n_8 = 5$$

Ora risaliamo ancora.
Per ottenere 5, il numero precedente può essere solo:

$$10$$

perché

$$10 \div 2 = 5$$

Infatti:

$$5 - 7 = -2$$

non va bene.
Quindi:

$$n_7 = 10$$

Per ottenere 10, il numero precedente può essere:

- 20, perché

$$20 \div 2 = 10$$

- oppure $10 - 7 = 3$, che va bene perché 3 è dispari e positivo:

$$3 + 7 = 10$$

Scegliamo il più piccolo:

$$n_6 = 3$$

Per ottenere 3, il numero precedente può essere solo:

$$6$$

perché

$$6 \div 2 = 3$$

e

$$3 - 7 = -4$$

non va bene.

Quindi:

$$n_5 = 6$$

Per ottenere 6, il numero precedente può essere solo:

$$12$$

perché

$$12 \div 2 = 6$$

e

$$6 - 7 = -1$$

non va bene.

Quindi:

$$n_4 = 12$$

Per ottenere 12, il numero precedente può essere:

$$24 \quad \text{oppure} \quad 5$$

Scegliamo il più piccolo:

$$n_3 = 5$$

Per ottenere 5, il numero precedente può essere solo:

$$10$$

Quindi:

$$n_2 = 10$$

Per ottenere 10, il numero precedente può essere:

$$20 \quad \text{oppure} \quad 3$$

Scegliamo il più piccolo:

$$n_1 = 3$$

Facciamp un controllo finale

Verifichiamo che partendo da 3 si arriva davvero a 6 al decimo studente.

$$n_1 = 3$$

Poiché 3 è dispari:

$$n_2 = 3 + 7 = 10$$

Poiché 10 è pari:

$$n_3 = 10 \div 2 = 5$$

Poiché 5 è dispari:

$$n_4 = 5 + 7 = 12$$

Poiché 12 è pari:

$$n_5 = 12 \div 2 = 6$$

Poiché 6 è pari:

$$n_6 = 6 \div 2 = 3$$

Poiché 3 è dispari:

$$n_7 = 3 + 7 = 10$$

Poiché 10 è pari:

$$n_8 = 10 \div 2 = 5$$

Poiché 5 è dispari:

$$n_9 = 5 + 7 = 12$$

Poiché 12 è pari:

$$n_{10} = 12 \div 2 = 6$$

Funziona perfettamente.

Risposta

Il numero più piccolo che il primo studente può aver scelto è:

$$\boxed{3}$$

Problema Marzo (cat. 3 media-1 superiore)

Testo:

Gli avventurieri del Diarik Castle hanno scoperto un drago che custodisce un tesoro in una grotta la cui porta è chiusa da un codice numerico. Sulla porta compare una sequenza infinita di numeri costruita in questo modo: " Il primo numero è $S_1 = 7$. Ogni numero successivo si ottiene elevando il precedente alla quarta potenza e prendendo solo l'ultima cifra del risultato, poi aggiungendo 3 a quella cifra. Esempio: S_2: calcolo $7^4 = 2401$. L'ultima cifra è 1. Aggiungo 3. Quindi $S_2 = 4$. Esempio: S_3 : calcolo $4^4 = 256$. L'ultima cifra è 6. Aggiungo 3. Quindi $S_3 = 9$. Il codice per aprire la porta è la somma dei primi 2025 numeri della sequenza $(S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{2025})$." Qual è l'ultima cifra di questa somma?

Svolgimento:

Il codice per aprire la porta è la somma dei primi 2025 numeri della sequenza:

$$S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{2025}$$

Bisogna trovare **l'ultima cifra** di questa somma.

Il numero 2025 è molto grande, quindi sarebbe impossibile calcolare tutti i termini della sequenza uno per uno.

Fortunatamente ci viene chiesta solo **l'ultima cifra**. Questo significa che possiamo concentrarci soltanto sulle ultime cifre dei numeri.

Infatti, quando si eleva un numero alla quarta potenza, l'ultima cifra dipende soltanto dall'ultima cifra del numero stesso.

Calcoliamo i primi termini

Partiamo dal primo numero.

$$S_1 = 7$$

Calcoliamo S_2

$$7^4 = 2401$$

Ultima cifra: 1

$$S_2 = 1 + 3 = 4$$

Calcoliamo S_3

$$4^4 = 256$$

Ultima cifra: 6

$$S_3 = 6 + 3 = 9$$

Calcoliamo S_4

$$9^4 = 6561$$

Ultima cifra: 1

$$S_4 = 1 + 3 = 4$$

Calcoliamo S_5

$$4^4 = 256$$

Ultima cifra: 6

$$S_5 = 6 + 3 = 9$$

Ora notiamo qualcosa di importante.
Dopo il primo numero, i valori si ripetono sempre nello stesso modo:

$$4, 9, 4, 9, 4, 9, \ldots$$

Quindi la sequenza diventa periodica.

Il periodo della sequenza

Dopo il primo termine, la sequenza ripete sempre:

$$4, 9$$

Questo significa che il **periodo è 2**.
Ogni coppia di numeri dà la stessa somma:

$$4 + 9 = 13$$

E l'ultima cifra di 13 è

$$3$$

Quanti numeri dobbiamo sommare?

La somma richiesta è

$$S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{2025}$$

Il primo numero è speciale:

$$S_1 = 7$$

Poi rimangono

$$2025 - 1 = 2024$$

numeri che seguono il pattern:

$$4, 9, 4, 9, 4, 9, \ldots$$

Raggruppiamo a coppie

I 2024 numeri formano coppie:

$$(4 + 9), (4 + 9), (4 + 9), \ldots$$

Numero di coppie:

$$2024 \div 2 = 1012$$

Ogni coppia vale:

$$4 + 9 = 13$$

Quindi la somma delle coppie è:

$$1012 \times 13$$

Ci interessa solo l'ultima cifra

Poiché ci interessa solo l'ultima cifra, osserviamo che:

$$13 \to \text{ultima cifra } = 3$$

Quindi è come calcolare l'ultima cifra di

$$1012 \times 3$$

$$1012 \times 3 = 3036$$

Ultima cifra:

$$6$$

Aggiungiamo il primo termine

Adesso dobbiamo aggiungere $S_1 = 7$.

$$6 + 7 = 13$$

L'ultima cifra è

$$3$$

Risposta finale

L'ultima cifra della somma

$$S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{2025}$$

è

$$\boxed{3}$$

Problema Marzo (cat. 2-3 superiore)

Testo:

Simo e Dani si stanno allenando in matematica, e Dani decide di proporre a Simo un problema di geometria. "Sia ABC un triangolo rettangolo con l'angolo retto in C. I cateti misurano AC = 30 e BC = 40. All'interno del triangolo è inscritto un quadrato DEFG in modo tale che: i vertici D ed E giacciono sull'ipotenusa AB; il vertice F giace sul cateto BC; il vertice G giace sul cateto AC. Qual è la misura del lato del quadrato DEFG?" (si fornisca come risposta la somma somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini)

Svolgimento:

Chiamiamo con x la misura del lato del quadrato.

Dobbiamo quindi trovare x.

Osservazione iniziale

Il triangolo ABC è rettangolo in C, con cateti:

$$AC = 30, \qquad BC = 40$$

Quindi il triangolo è un triangolo 30-40-50, perché:

$$AB = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2500} = 50$$

Dunque:

$$AB = 50$$

Il quadrato è appoggiato con due vertici sull'ipotenusa AB, mentre gli altri due vertici stanno sui cateti.

Questo significa che un lato del quadrato è parallelo all'ipotenusa.

Idea geometrica fondamentale

Conviene usare l'area del triangolo in due modi diversi.

L'idea è la seguente:

- il quadrato divide il triangolo grande in:
  1. il quadrato centrale;
  2. due triangolini rettangoli agli estremi vicino ad A e B.

Ma c'è un modo ancora più elegante.

Poiché il lato DE del quadrato sta sull'ipotenusa AB, e il lato opposto FG è parallelo ad AB, il segmento FG taglia il triangolo creando un triangolo più piccolo simile al triangolo iniziale.

Questa è la chiave del problema.

Altezza del triangolo rispetto all'ipotenusa

Per lavorare bene, calcoliamo l'altezza del triangolo ABC relativa all'ipotenusa AB.

L'area del triangolo si può scrivere in due modi.

Da una parte, usando i cateti:

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{30 \cdot 40}{2} = 600$$

Dall'altra, usando base $AB = 50$ e altezza h relativa all'ipotenusa:

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{50 \cdot h}{2} = 25h$$

Uguagliando:

$$25h = 600$$

$$h = \frac{600}{25} = 24$$

Quindi l'altezza del triangolo rispetto all'ipotenusa è:

$$h = 24$$

Dove si trova il lato inferiore del quadrato

Il lato DE del quadrato sta sull'ipotenusa AB.

Il lato opposto FG è parallelo ad AB e dista da essa esattamente x, perché il quadrato ha lato x.

Quindi il segmento FG è una retta parallela ad AB posta a distanza x da AB verso l'interno del triangolo.

L'altezza totale del triangolo, misurata da C alla retta AB, è 24.

Perciò la distanza tra C e la retta contenente FG è:

$$24 - x$$

Uso della similitudine

Il triangolo con vertice C e base FG è simile al triangolo grande ABC, perché:

- ha il vertice comune C;
- il segmento FG è parallelo ad AB.

Quindi il rapporto di similitudine tra triangolo piccolo e triangolo grande è uguale al rapporto tra le rispettive altezze:

$$\frac{24-x}{24}$$

Ma anche le basi corrispondenti stanno nello stesso rapporto, quindi:

$$\frac{FG}{AB} = \frac{24-x}{24}$$

Ora, poiché $DEFG$ è un quadrato, tutti i lati sono uguali, quindi:

$$FG = x$$

e inoltre

$$AB = 50$$

Sostituendo:

$$\frac{x}{50} = \frac{24-x}{24}$$

Risoluzione dell'equazione

Risolviamo:

$$\frac{x}{50} = \frac{24-x}{24}$$

Facciamo il prodotto incrociato:

$$24x = 50(24-x)$$

$$24x = 1200 - 50x$$

$$24x + 50x = 1200$$

$$74x = 1200$$

$$x = \frac{1200}{74}$$

Semplifichiamo dividendo per 2:

$$x = \frac{600}{37}$$

Questa frazione è già ridotta ai minimi termini.

Quindi la misura del lato del quadrato è:

$$\boxed{\frac{600}{37}}$$

Risposta richiesta dal problema

Il problema però non chiede direttamente il lato del quadrato.

Chiede invece la somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

Abbiamo trovato:

$$x = \frac{600}{37}$$

Quindi dobbiamo calcolare:

$$600 + 37 = 637$$

$$\boxed{637}$$

Controllo del risultato

Facciamo un rapido controllo numerico.

Poiché:

$$\frac{600}{37} \approx 16{,}22$$

il lato del quadrato è circa 16,22, che è una misura ragionevole: infatti è minore dei cateti 30 e 40, come deve essere.

Inoltre, sostituendo nell'equazione:

$$\frac{x}{50} = \frac{24 - x}{24}$$

si ottiene un'uguaglianza corretta.

Quindi il risultato è coerente.

Conclusione

La misura del lato del quadrato è:

$$\frac{600}{37}$$

La somma tra numeratore e denominatore vale dunque:

$$\boxed{637}$$

Problema Marzo (cat. 4-5 superiore)

Testo:

Un gruppo di ladri-matematici sono riusciti ad intrufolarsi nella Diarik Bank che custodisce il segreto dei teoremi sconosciuti, e stanno cercando di scassinare la cassaforte. Il sistema di sicurezza accetta solo password numeriche di 8 cifre (utilizzando le cifre da 1 a 9, lo zero è escluso) che abbiano la proprietà di essere "strettamente oscillanti". Una password "$n_1\ n_2\ n_3\ n_4\ n_5\ n_6\ n_7\ n_8$" si dice strettamente oscillante se le sue cifre seguono un andamento "su-giù" o "giù-su" continuo. Più precisamente, una password è oscillante se:

$$n_1 < n_2 > n_3 < n_4 > n_5 < n_6 > n_7 < n_8 \quad \text{oppure} \quad n_1 > n_2 < n_3 > n_4 < n_5 > n_6 < n_7 > n_8$$

Inoltre, per aumentare la sicurezza, il sistema impone che la password non contenga cifre ripetute (quindi le 8 cifre devono essere tutte distinte, scelte dall'insieme 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Quante sono le possibili password che soddisfano queste condizioni?

Svolgimento:

Dobbiamo contare tutte le sequenze di 8 cifre:

- scelte tra $1, 2, \ldots, 9$;
- tutte diverse;
- che seguono uno schema alternato di disuguaglianze.

Questo è un classico problema di **permutazioni oscillanti** (dette anche permutazioni alternate).

Procediamo con ordine.

Scelta delle cifre

Le cifre disponibili sono 9, ma la password deve contenerne 8, tutte diverse.

Il primo passo è quindi scegliere quali 8 cifre usare.

Il numero di modi per scegliere 8 cifre tra 9 è:

$$\binom{9}{8} = 9$$

Quindi ci sono 9 possibili insiemi di cifre.

Ad esempio potremmo avere:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

oppure

$$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

eccetera.

Ordinare le cifre

Una volta scelto un insieme di 8 cifre distinte, dobbiamo ordinarle in modo che soddisfino la condizione oscillante.

Per esempio:

$$n_1 < n_2 > n_3 < n_4 > n_5 < n_6 > n_7 < n_8$$

oppure

$$n_1 > n_2 < n_3 > n_4 < n_5 > n_6 < n_7 > n_8$$

Queste sono esattamente le cosiddette **permutazioni alternate**.

Quante permutazioni alternate esistono

Il numero di permutazioni alternate di n elementi è dato dai **numeri di Euler** (o numeri zig-zag).

Per $n = 8$ il numero di permutazioni che soddisfano

$$a_1 < a_2 > a_3 < a_4 > a_5 < a_6 > a_7 < a_8$$

è

$$1385$$

Per simmetria, lo stesso numero vale per l'altro schema

$$a_1 > a_2 < a_3 > a_4 < a_5 > a_6 < a_7 > a_8$$

Quindi il numero totale di permutazioni oscillanti è

$$1385 + 1385 = 2770$$

Questo numero dipende solo dal fatto che gli 8 numeri siano tutti distinti, non dai valori specifici.

Moltiplichiamo per le possibili scelte delle cifre

Ricordiamo che potevamo scegliere le 8 cifre in 9 modi diversi.

Per ciascuna scelta abbiamo 2770 possibili ordini oscillanti.

Quindi il numero totale di password è:

$$9 \times 2770$$

$$= 24930$$

Risposta

Il numero di password possibili che soddisfano tutte le condizioni è

$$\boxed{24930}$$