

# Soluzione tappa Aprile

## Problema Aprile 2026 - C11

### Testo:

In una tranquilla giornata di Pasqua a Diarik Town, tra uova di cioccolato, colombe sul tavolo e quell'aria da festa che rende tutto un po' più allegro, Simo, Gigi, Dani e Alex si ritrovano davanti a una lavagna su cui sono scritti tutti i numeri interi da 1 a 40. Per passare il tempo, e digerire, decidono di fare un gioco: a ogni turno scelgono due numeri qualsiasi tra quelli ancora presenti sulla lavagna, li chiamano "a" e "b", li cancellano e scrivono al loro posto il numero "a+b+1". Tra una battuta e un pezzo di cioccolato, continuano così turno dopo turno, finché sulla lavagna non rimane un solo numero. Qual è il numero finale che resterà scritto?

### Soluzione

Consideriamo la somma di tutti i numeri presenti sulla lavagna. La somma dei numeri da 1 a n vale:

$$\frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Quindi, nel nostro caso la somma vale

$$1 + 2 + \dots + 40 = \frac{40 \cdot 41}{2} = 820.$$

Ora osserviamo che, in una mossa, i numeri  $a$  e  $b$  vengono sostituiti da  $a + b + 1$ . Quindi la somma totale aumenta di

$$(a + b + 1) - (a + b) = 1.$$

Poiché da 40 numeri si arriva a 1 numero, e a ogni mossa il numero di valori presente decresce di 1, vengono effettuate esattamente

$$40 - 1 = 39$$

mosse.

Dunque la somma finale vale

$$820 + 39 = 859.$$

Ma quando resta un solo numero sulla lavagna, tale numero coincide con la somma totale. Quindi, la soluzione è

$$\boxed{859}$$

## Problema Aprile 2026 - C12

### Testo:

Nella prestigiosa pasticceria Nufi di Diarik Town, per celebrare la Pasqua, è stato creato un uovo di cioccolato la cui sezione verticale è rappresentata da una figura geometrica particolare chiamata "Ovale di Pasqua". La figura è formata da più archi raccordati perfettamente: la base è una semicirconferenza di raggio  $r$ ; i fianchi sono due archi uguali, uno a destra e uno a sinistra, ciascuno corrispondente a un quarto di circonferenza di raggio  $r$ ; la punta è una semicirconferenza più piccola, di raggio  $r/2$ , che chiude l'uovo nella parte superiore. Mentre Simo e Gigi discutono su chi abbia trovato più ovetti di cioccolato, Dani misura alcune lunghezze della figura e lancia una sfida: "Se raddoppiamo il perimetro totale dell'uovo e poi aggiungiamo il raggio della base, otteniamo esattamente  $10\pi+2$  cm. Quanto vale il raggio  $r$  della base?"

### Soluzione

Calcoliamo il perimetro. La semicirconferenza di base ha lunghezza  $\pi r$ . Ciascun quarto di circonferenza di raggio  $r$  ha lunghezza

$$\frac{1}{4} \cdot 2\pi r = \frac{\pi r}{2},$$

quindi i due quarti insieme misurano  $\pi r$ . La semicirconferenza superiore ha raggio  $\frac{r}{2}$ , dunque lunghezza  $\pi \cdot \frac{r}{2} = \frac{\pi r}{2}$ .

Pertanto

$$P = \pi r + \pi r + \frac{\pi r}{2} = \frac{5\pi r}{2}.$$

Usiamo ora la condizione data:

$$2P + r = 10\pi + 2.$$

Sostituendo  $P$ :

$$2 \cdot \frac{5\pi r}{2} + r = 10\pi + 2,$$

cioè

$$5\pi r + r = 10\pi + 2.$$

Fattorizzando:

$$r(5\pi + 1) = 10\pi + 2 = 2(5\pi + 1).$$

Quindi

$$r = 2.$$

□

## Problema Aprile 2026 - C13

### Testo:

Alla Diarik School si sta festeggiando la Pasqua. Intorno a un tavolo circolare ci sono 12 bambini. Il coniglietto ha un cesto con 12 uova diverse: 6 uova sono al latte e 6 uova sono di cioccolato fondente. Il coniglio distribuisce casualmente un uovo a ogni bambino. Qual è la probabilità che non ci siano mai due bambini seduti uno accanto all'altro che abbiano ricevuto entrambi un uovo al latte? (Si fornisca come risposta la somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini)

### Soluzione

Poiché le uova di uno stesso tipo differiscono solo per il fatto di essere “al latte” o “fondenti” rispetto alla proprietà richiesta, il problema equivale a scegliere casualmente quali siano i 6 posti occupati da uova al latte. Il numero totale di modi di scegliere i 6 posti dei bambini che ricevono un uovo al latte è

$$\binom{12}{6}.$$

Ora imponiamo che non vi siano due posti adiacenti occupati da uova al latte. Su una disposizione circolare di 12 posti, avendo esattamente 6 posti da scegliere e volendo evitare adiacenze, l'unica possibilità è alternare perfettamente:

$$L, F, L, F, \dots, L, F$$

oppure

$$F, L, F, L, \dots, F, L.$$

Quindi i casi favorevoli sono esattamente

$$2.$$

La probabilità richiesta è dunque

$$\frac{2}{\binom{12}{6}} = \frac{2}{924} = \frac{1}{462}.$$

Quindi

$$\boxed{\frac{1}{462}}.$$

Se il testo della gara richiede come risposta il numero ottenuto sommando numeratore e denominatore della frazione ridotta, allora si ottiene

$$1 + 462 = 463.$$

$$\boxed{463}$$

# Problema Aprile 2026 - C14

## Testo:

Daniele sta mostrando al Team il nuovo uovo di Pasqua della famosa pasticceria Nufi, e decide di testare l'abilità dei suoi amici. "Potete considerare questo uovo come una circonferenza di centro  $O$  e raggio  $R$ . Sono presenti due corde  $AB$  e  $CD$  che si intersecano perpendicolarmente in un punto interno  $P$ . Si indicano con  $PA=a, PB=b, PC=c, PD=d$  le lunghezze dei quattro segmenti individuati da  $P$  sulle due corde. Si sa che:  $a, b, c, d$  sono quattro interi positivi distinti; esattamente uno tra  $a, b, c, d$  appartengono alla successione di Fibonacci; la distanza tra il centro  $O$  e il punto  $P$  soddisfa  $OP=50$ . Sia  $L$  è la lunghezza del segmento più lungo. Quanto vale  $S=R^2+L+PA+PB+PC+PD$ ?" Cosa devono rispondere i quattro amici?

## Soluzione

Poniamo il punto  $P$  nell'origine di un sistema di assi cartesiani, e le due corde sugli assi, poiché sono perpendicolari.

Allora possiamo scrivere:

$$A = (-a, 0), \quad B = (b, 0), \quad C = (0, c), \quad D = (0, -d).$$

### Teorema delle corde intersecanti

Per il teorema delle corde intersecanti:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD,$$

cioè

$$ab = cd.$$

### Relazione con $OP$

L'equazione della circonferenza passante per i quattro punti ha centro

$$O \left( \frac{b-a}{2}, \frac{c-d}{2} \right).$$

Quindi

$$OP^2 = \left( \frac{b-a}{2} \right)^2 + \left( \frac{c-d}{2} \right)^2.$$

Essendo  $OP = 50$ , otteniamo

$$\left( \frac{b-a}{2} \right)^2 + \left( \frac{c-d}{2} \right)^2 = 2500,$$

ossia

$$(b-a)^2 + (c-d)^2 = 10000.$$

Dunque dobbiamo cercare due differenze intere positive la cui somma dei quadrati sia  $10000 = 100^2$ . Le uniche possibilità non banali sono

$$\{|b-a|, |c-d|\} = \{60, 80\} \quad \text{oppure} \quad \{28, 96\}.$$

### Analisi dei casi

**Caso 1:**  $|b - a| = 60$ ,  $|c - d| = 80$ .  
Senza perdita di generalità poniamo

$$b = a + 60, \quad d = c + 80.$$

Dalla relazione  $ab = cd$  segue

$$a(a + 60) = c(c + 80).$$

Sviluppando:

$$a^2 + 60a = c^2 + 80c.$$

Portando tutto a sinistra:

$$a^2 + 60a - c^2 - 80c = 0.$$

Completando i quadrati:

$$(a + 30)^2 - (c + 40)^2 = 700.$$

Quindi

$$(a - c - 10)(a + c + 70) = 700.$$

Poiché  $a, c$  sono interi positivi, si trova l'unica soluzione positiva con valori distinti:

$$a = 144, \quad b = 204, \quad c = 136, \quad d = 216.$$

Verifica:

$$144 \cdot 204 = 29376, \quad 136 \cdot 216 = 29376.$$

Inoltre

$$204 - 144 = 60, \quad 216 - 136 = 80.$$

**Caso 2:**  $|b - a| = 28$ ,  $|c - d| = 96$ .

Analogamente si ottiene l'unica soluzione positiva distinta

$$a = 512, \quad b = 540, \quad c = 480, \quad d = 576.$$

Ma nessuno di questi numeri appartiene alla successione di Fibonacci, quindi il caso è impossibile.

Dunque necessariamente

$$(a, b, c, d) = (144, 204, 136, 216)$$

a meno di scambiare i ruoli sulle due corde.

**Calcolo di  $R^2$**

Per una circonferenza con centro  $O$ , si ha

$$R^2 = OP^2 + ab.$$

Infatti

$$R^2 = 2500 + ab = 2500 + 29376 = 31876.$$

**Calcolo finale di  $S$**

Il segmento più lungo è

$$L = 216.$$

Inoltre

$$a + b + c + d = 144 + 204 + 136 + 216 = 700.$$

Quindi

$$S = R^2 + L + a + b + c + d = 31876 + 216 + 700 = 32792.$$

32792